



۱) اگر A یک تابع همانی باشد در این صورت میانگین a, b, c را به دست آورید.

$$A = \{(5, a+2), (a, b), (c, 3a)\}$$

۲) مقدار a, b را طوری مشخص کنید که ضابطه $f(x) = (a-1)x^2 + bx + 4$ یک تابع ثابت باشد.

۳) با توجه به تابع دو ضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq 2 \\ -2x-1 & x < 2 \end{cases}$ حاصل $f(3) + f(-1)$ را به دست آورید.

۴) مقادیر a, b را طوری تعیین کنید که ضابطه $f(x) = (a+2)x + b - 3$ یک تابع همانی باشد.

۵) اگر دو زوج مرتب $(7, 3m-1)$ و $(7, 4m+2)$ ، دو زوج مرتب از یک تابع باشند مقدار m را مشخص کنید.

۶) مجموعه دامنه و برد تابع زیر را مشخص کنید.

$$f = \{(1, 1), (2, 5), (3, 7), (4, -1)\}$$

۷) در هریک از استدلالات زیر جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید تا قیاس کامل شود.

$$x : p > 0 \rightarrow q : x^2 > 0$$

$$p : 3 > 0$$

$$\therefore \dots\dots\dots$$

$$p : \text{دو خط موازی باشند} \Rightarrow q : \text{هیچگاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\text{خطوط } L_1 \text{ و } L_2 \text{ هیچگاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند.}$$

۸) با استفاده از جدول ارزشی، درستی قاعده قیاس استثنایی $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ را نشان دهید.

۹) اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید:

$$۱) (p \Leftrightarrow q) \wedge r$$

$$۲) (\sim p \Leftrightarrow q) \vee r$$

$$۳) (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

$$۴) (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

$$۵) (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$$

$$۶) (r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$$

$$۷) (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$$



۱۰ جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۷ زوج است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.		
۲	اگر ۹ مربع کامل است، آنگاه $\sqrt{9}$ مربع کامل است.		
۳	اگر ۲۹ اول است، آنگاه ۲ زوج است.		
۴	اگر آنگاه	✓	
۵	اگر آنگاه		✓
۶	اگر ۷ فرد است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.		
۷	اگر آنگاه ۹۹ اول است.	✓	

۱۱ با دو گزاره زیر گزاره‌های ترکیبی خواسته شده را بنویسید.

عدد ۲، عددی اول است - $\sqrt{5}$ عددی گویا است

الف) ترکیب عطفی

ب) ترکیب فصلی

۱۲ عکس نقیض گزاره شرطی زیر را بنویسید.

«اگر به مدرسه بروم آنگاه در درس‌هایم موفق می‌شوم»

۱۳ در تابع $f(x) = \begin{cases} x & x < -1 \\ x^2 & -1 \leq x \leq 2 \\ 5 & x > 2 \end{cases}$ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $f(2)$

ب) $f(3) + f(-1)$

ج) $f(-\sqrt{2}) + f(\sqrt{3})$

د) $f(\sqrt{2}) + f(5)$

۱۴ گزاره مرکبی از ترکیب $(2n - 1)$ گزاره ساده تشکیل شده به طوری که جدول ارزشی گزاره‌ها دارای ۳۲ ردیف است، n را بیابید.

۱۵ گزاره‌های زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

الف) دو برابر جذر عددی برابر خودش است.

ب) مکعب یک عدد، بزرگ‌تر از هفت برابر آن عدد، به علاوه پنج است.

پ) مجموع معکوس‌های دو عدد مثبت، بزرگ‌تر یا مساوی مجموع آن دو عدد است.

ت) مکعب مجموع دو عدد بزرگ‌تر یا مساوی مجموع مکعب آن دو عدد است.

ث) قرینه قرینه یک عدد، برابر خود آن عدد است.

۱۶ اگر $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2}$ ، مقدار عددی $f(2) - f(-2)$ را محاسبه کنید.

پاسخنامه تشریحی

۱ در نمایش زوج مرتبی تابع همانی مؤلفه اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابرند.

$$(5, a+2) \xrightarrow{\text{تابع همانی}} a+2=5 \Rightarrow a=3$$

با جایگذاری مقدار $a=3$ در دو زوج مرتب دیگر مقدار c, b را نیز به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} (a, b) &\xrightarrow{a=3} (3, b) \Rightarrow b=3 \\ (c, 3a) &\xrightarrow{a=3} (c, 9) \Rightarrow c=9 \end{aligned}$$

و در آخر میانگین a, b, c را محاسبه می کنیم.

$$\frac{3+3+9}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

۲ ضابطه تابع ثابت به صورت $f(x) = c$ (یک عدد حقیقی) است.

$$f(x) = (a-1)x^2 + bx + 4 \Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ b=0 \end{cases}$$

با قرار دادن $a=1, b=0$ در ضابطه تابع داریم:

$$f(x) = 4$$

۳ با توجه به اینکه ۳ بزرگتر از ۲ است ($x \geq 2$) برای به دست آوردن $f(3)$ از ضابطه $f(x) = 3x + 1$ استفاده می کنیم.

$$f(3) = 3 \times 3 + 1 = 10$$

همچنین ۱ کوچکتر از ۱ است ($x < 1$) برای به دست آوردن $f(-1)$ از ضابطه $-2x - 1$ استفاده می کنیم.

$$f(-1) = -2 \times (-1) - 1 = 2 - 1 = 1$$

و در آخر حاصل $f(3) + f(-1)$ را به دست می آوریم.

$$f(3) + f(-1) = 10 + 1 = 11$$

۴ ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است.

با توجه به ضابطه تابع همانی باید ضریب x یعنی $a+2$ برابر ۱ و مقدار ثابت $b-3$ برابر صفر شود.

$$a+2=1 \Rightarrow a=-1, \quad b-3=0 \Rightarrow b=3$$

۵ دو زوج مرتب دارای مؤلفه های اول یکسان هستند برای اینکه این زوج مرتب ها مربوط به یک تابع باشند باید مؤلفه های دومشان نیز با هم برابر باشند. (با توجه به تعریف تابع)

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} 4m+2 &= 3m-1 \Rightarrow 4m-3m = -1-2 \\ \Rightarrow m &= -3 \end{aligned}$$

۶ در نمایش زوج مرتبی یک تابع مؤلفه های اول، دامنه و مؤلفه های دوم، برد تابع است.

$$\begin{aligned} D_f &= \{1, 2, 3, 4\} \\ R_f &= \{1, 5, 7, -1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x: p > 0 &\rightarrow q: x^2 > 0 \\ \underline{p: 3 > 0} & \\ \therefore 3^2 > 0 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &\rightarrow q \\ \text{حالت کلی قیاس استثنایی به صورت} &\underline{p} \text{ است.} \\ \therefore q & \end{aligned}$$

با قرار دادن q در قسمت نتیجه استدلال کامل می شود.

دو خط هیچگاه یکدیگر را قطع نمی کنند: $q \Rightarrow$ دو خط موازی باشند: p
دو خط L_1 و L_2 موازی هستند.

خطوط L_1 و L_2 هیچگاه یکدیگر را قطع نمی کنند. $\therefore$

با قرار دادن p در مقدمه دوم استدلال کامل می شود.

۸

$$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د



-۱

$$(p \Leftrightarrow q) \wedge r$$

p درست و q نادرست پس ترکیب دو شرطی $(p \Leftrightarrow q)$ نادرست است و در نتیجه $(p \Leftrightarrow q) \wedge r$ نادرست است.

-۲

$$(\sim p \Leftrightarrow q) \vee r$$

p درست و $\sim p$ نادرست است پس $(\sim p \Leftrightarrow q)$ درست است و لذا ترکیب فصلی یک گزاره درست با هر گزاره دلخواه دارای ارزش درست است.

-۳

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

p درست و q نادرست است پس ترکیب دو شرطی $(p \Leftrightarrow q)$ نادرست است.

p درست و q نادرست است پس ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ نادرست است پس در نتیجه $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ درست است. (دو طرف هم ارزش‌اند).

-۴

$$(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

p درست پس $\sim p$ نادرست است. ترکیب فصلی دو گزاره نادرست، نادرست است پس $(\sim p \vee q)$ نادرست است.

p درست و q نادرست است پس ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ نادرست است در نتیجه $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ درست است. (دو طرف هم ارزش‌اند).

-۵

$$(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$$

p درست پس $\sim p$ نادرست است. q نادرست پس $\sim q$ درست است پس ترکیب فصلی دو گزاره درست است.

گزاره $(p \vee q)$ با توجه به درست بودن p ، درست است و نقیض آن نادرست است یعنی $\sim (p \vee q)$ نادرست است در نتیجه $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$ نادرست است. (دو طرف هم ارزش نیستند).

-۶

$$(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$$

p درست و q نادرست است پس $p \wedge q$ نادرست است.

r دلخواه است پس ارزش $r \Leftrightarrow p$ بستگی به گزاره r دارد در نتیجه ارزش گزاره $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$ بستگی به ارزش گزاره r دارد.

-۷

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$$

p درست و q نادرست است پس $p \wedge q$ نادرست است.

p درست و q نادرست است پس $p \vee q$ درست است.

در نتیجه $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$ نادرست است. (دو طرف هم ارزش نیستند).

۱۰

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۷ زوج است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.	✓	
۲	اگر ۹ مربع کامل است، آنگاه $\sqrt{9}$ مربع کامل است.		✓
۳	اگر ۲۹ اول است، آنگاه ۲ زوج است.	✓	
۴	اگر ۵ فرد باشد آنگاه ۷ زوج است.		✓
۵	اگر ۵ زوج باشد آنگاه ۷ زوج است.	✓	
۶	اگر ۷ فرد است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.	✓	
۷	اگر ۶ فرد باشد آنگاه ۹۹ اول است.	✓	

ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ فقط زمانی نادرست است که مقدم (p) درست و تالی (q) نادرست باشد. در بقیه حالت درست است.

۱۱ الف) عدد ۲، عددی اول است و $\sqrt{5}$ عددی گویا است.

ب) عدد ۲، عددی اول است یا $\sqrt{5}$ عددی گویا است.

۱۲ عکس نقیض گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت $p \Rightarrow \sim q$ است. در این صورت عکس نقیض گزاره شرطی به صورت زیر خواهد بود:

اگر در درس هایم موفق نشوم آنگاه به مدرسه نرفته‌ام.

۱۳

برای تعیین مقدار تابع به ازای هریک از مقادیر x لازم است ابتدا مشخص کنیم مقدار x در دامنه کدام ضابطه قرار دارد.

الف) $x = 2$ متعلق به دامنه $-1 \leq x \leq 2$ می‌باشد، بنابراین مقدار تابع را با ضابطه دوم تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = x^2, \quad -1 \leq x \leq 2$$

$$f(2) = 2^2 = 4$$



ب) $x = 3$ متعلق به دامنه $x > 2$ می باشد، بنابراین مقدار تابع را با ضابطه سوم تعیین می کنیم و $x = -1$ متعلق به دامنه $-1 \leq x \leq 2$ می باشد، بنابراین مقدار تابع را با ضابطه دوم تعیین می کنیم:

$$f(x) = 5 \quad x > 2 \Rightarrow f(3) = 5$$

$$f(x) = x^2 \quad -1 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$f(3) + f(-1) = 5 + 1 = 6$$

ج) $x = -\sqrt{2} \simeq -1,4$ متعلق به دامنه $x < -1$ می باشد، بنابراین مقدار تابع را با ضابطه اول تعیین می کنیم و $x = \sqrt{3} \simeq 1,7$ متعلق به دامنه $-1 \leq x \leq 2$ می باشد، بنابراین مقدار تابع را با ضابطه دوم تعیین می کنیم.

$$f(x) = x \quad x < -1 \Rightarrow f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

$$f(x) = x^2 \quad -1 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}^2 = 3$$

$$f(-\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) = -\sqrt{2} + 3$$

د) $x = \sqrt{2} \simeq 1,4$ متعلق به دامنه $-1 \leq x \leq 2$ می باشد، بنابراین مقدار تابع را با ضابطه دوم تعیین می کنیم و $x = 5$ متعلق به دامنه $x > 2$ می باشد، بنابراین مقدار تابع را با ضابطه سوم تعیین می کنیم.

$$f(x) = x^2 \quad -1 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^2 = 2$$

$$f(x) = 5 \quad x > 2 \Rightarrow f(5) = 5$$

$$f(\sqrt{2}) + f(5) = 2 + 5 = 7$$

۱۴) اگر گزاره ای از ترکیب n گزاره درست شده باشد جدول نمایش ارزشی گزاره ای مرکب دارای 2^n ردیف است.

$$2^{2n-1} = 32 = 2^5 \Rightarrow 2n - 1 = 5 \Rightarrow 2n = 6 \Rightarrow \boxed{n = 3}$$

۱۵)

الف) x را عدد مورد نظر در نظر می گیریم.

ب) x را عدد مورد نظر در نظر می گیریم.

پ) x و y را دو عدد مثبت مورد نظر در نظر می گیریم.

ت) x و y را دو عدد مورد نظر در نظر می گیریم.

ث) x را عدد مورد نظر در نظر می گیریم.

۱۶)

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= \frac{2^3 - 1}{2^2 + 2} = \frac{8 - 1}{4 + 2} = \frac{7}{6} \\ f(-2) &= \frac{(-2)^3 - 1}{(-2)^2 + 2} = \frac{-8 - 1}{4 + 2} = \frac{-9}{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(2) - f(-2) = \frac{7}{6} - \left(-\frac{9}{6} \right) = \frac{7 + 9}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$